Proseminar über p-adische Zahlen

im Sommersemester 2025

Dieses Seminar bietet eine elementare Einführung in die Theorie der p-adischen Zahlen und ist für alle Studierenden ab dem zweiten Semester geeignet. Es ist als bunte Mischung aus Analysis, Algebra, Zahlentheorie, Topologie und Geometrie geplant und führt wichtige Konzepte dieser Gebiete anhand des konkreten Beispiels der p-adischen Zahlen ein.

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind die Vervollständigung der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ bezüglich der üblichen euklidischen Metrik. Für eine Primzahl p sind die p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$ ebenfalls eine Vervollständigung von $\mathbb{Q}$, allerdings bezüglich der p-adischen Metrik. Wie sich jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ als Reihe

$$x = a_n \cdot 10^n + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 \cdot 10^0 + a_{-1} \cdot 10^{-1} + a_{-2} \cdot 10^{-2} + \ldots$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ schreiben lässt, so kann man jede p-adische Zahl $x \in \mathbb{Q}_p$ als Reihe

$$x = a_{-n} \cdot p^{-n} + \ldots + a_{-1} \cdot p^{-1} + a_0 \cdot p^0 + a_1 \cdot p^1 + a_2 \cdot p^2 + \ldots$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ ausdrücken. Wie in den rellen Zahlen die Folge $(10^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null konvergiert (bezüglich der euklidischen Metrik), so bildet die Folge $(p^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in den p-adischen Zahlen (bezüglich der p-adischen Metrik). Die daraus resultierende Geometrie weist einige kuriose Eigenschaften auf: jeder Punkt eines Kreises ist sein Mittelpunkt und jedes Dreieck ist gleichschenklig. Auch die Analysis auf den p-adischen Zahlen verhält sich anders: eine Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ konvergiert in $\mathbb{Q}_p$ genau dann, wenn die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist!

Themen: Bewertete Körper und Vervollständigung, der Körper $\mathbb{Q}_p$ der p-adischen Zahlen und sein Unterring $\mathbb{Z}_p$ der ganzen p-adischen Zahlen, das Henselsche Lemma, der Satz von Ostrowski, topologische Eigenschaften von $\mathbb{Q}_p$ und Analysis darin (Folgen und Reihen, stetige Funktionen).

Literatur: Hauptquelle ist das Buch von Svetlana Katok. Eine alternative – und über das Seminar hinausgehende – Quelle ist das Buch von Fernando Gouvêa, aus welchem das erste Kapitel „Apéritif“ eine schöne Einführung in das Thema bietet.

- Katok, Svetlana: *p-adic Analysis compared with Real*, AMS 2007.
- Gouvêa, Fernando: *p-adic Numbers. An Introduction*, Third Edition, Springer 2020.

Vorkenntnisse: Analysis I, Lineare Algebra I.

Zeit und Ort: Dienstags, 11–13 Uhr im Mathematikon.

Kontakt: Christian Dahlhausen, `cdahlhausen@mathi.uni-heidelberg.de`.
Bei Interesse bitte in die Sammelgruppe im Müsli eintragen.

Vorträge

Vortrag 1: Bewertete Körper (22.04.)
Definition eines bewerteten Körpers, elementare Eigenschaften von archimedischen und nichtarchimedischen Normen [Kat07, §1.2], [Gou20, §2.1, 2.2].

Vortrag 2: Vervollständigung eines bewerteten Körpers (29.04.)
Definition vollständiger metrischer Räume, Beispiel der reellen Zahlen, Konstruktion der Vervollständigung eines normierten Körpers [Kat07, §1.1,1.3].

Vortrag 3: Der Körper $\mathbb{Q}_p$ der p-adischen Zahlen (06.05.)
Definition der p-adischen Bewertung v_p, Äquivalenz zwischen Bewertungen und nichtarchimedischen Normen, Definition des Körpers $\mathbb{Q}_p$ der p-adischen rationalen Zahlen, kanonische p-adische Entwicklung, Definition und äquivalente Charakterisierungen der p-adischen ganzen Zahlen $\mathbb{Z}_p$ [Kat07, §1.4], [Gou20, §3.2].

Vortrag 4: Arithmetik in $\mathbb{Q}_p$ (13.05.)
Addition, Multiplikation und Division in $\mathbb{Q}_p$, Charakterisierung rationaler Zahlen vermöge der kanonischen p-adischen Entwicklung, viele Beispiele [Kat07, §1.5, 1.6].

Vortrag 5: Das Henselsche Lemma und Kongruenzen (20.05.)
Henselsches Lemma, Lösbarkeit von Gleichungen in $\mathbb{Z}_p$, quadratische Reste modulo p, eine weitere Anwendung aus den Übungsaufgaben [Kat07, §1.7], [Gou20, §4.5, 4.6].

Vortrag 6: Der Ring $\mathbb{Z}_p$ der ganzen p-adischen Zahlen (27.05.)
Algebraische Eigenschaften von $\mathbb{Z}_p$, d.h. $\mathbb{Z}_p$ is ein lokaler Hauptidealring. Beschreibung der Einheiten von $\mathbb{Z}_p$ mittels Einseinheiten und Teichmüller Lifts [Kat07, §1.8].

Vortrag 7: Der Satz von Ostrowski (03.06.)
Charakterisierung von Normen auf $\mathbb{Q}$ bis auf Äquivalenz, Produktformel und Quadrate in $\mathbb{Q}$ [Kat07, §1.9].

Vortrag 8: Topologische Eigenschaften (10.06.)
Grundbegriffe der Topologie und Beschreibung der Topologie auf $\mathbb{Q}_p$, insbesondere offene/abgeschlossene Bälle und Kompaktheit von $\mathbb{Z}_p$ [Kat07, §2.1], [Gou20, §2.3].

Vortrag 9: Folgen und Reihen (17.06.)
Konvergenzeigenschaften von Folgen und Reihen in $\mathbb{Q}_p$ [Kat07, §3.1], [Gou20, §5.1].

Vortrag 10: Potenzreihen (24.06.)
Eigenschaften p-adischer Potenzreihen [Kat07, §3.2], [Gou20, §5.4].

Vortrag 11: p-adische Exponential- und Logarithmusfunktion (01.07.)
Eigenschaften der p-adischen Exponential- und Logarithmusfunktion [Kat07, §3.4, 3.5], [Gou20, §5.7].

Vortrag 12: Stetige und uniform stetige Funktionen (08.07.)
Eigenschaften stetiger und uniform stetiger p-adischer Funktionen [Kat07, §4.1, §4.2], [Gou20, §5.2].

Vortrag 13: Interpolationsreihen (15.07.)
Theorie p-adischer Interpolationsreihen, Satz von Mahler, Anwendung anhand der Funktion a^x [Kat07, §4.6], [Gou20, §5.10].

Literatur

[Gou20] Gouvêa, Fernando: *p-adic Numbers. An Introduction*, Third Edition, Springer 2020.

[Kat07] Katok, Svetlana: *p-adic Analysis Compared with Real*, AMS 2007.