Seminar über quadratische Formen und Milnor-Witt-K-Theorie

Wintersemester 2024/25

Dr. C. Dahlhausen & Dr. M. Lüders

Viele Fragen der modernen Zahlentheorie haben ihren Ursprung in der Theorie der quadratischen Formen. Eine *quadratische Form* ist ein Polynom der Form $a_1x_1^2 + \ldots + a_kx_k^2$ für ein positive ganze Zahl k und Koeffizienten $a_1, \ldots, a_k$ in einem Ring (von Charakterisik ungleich 2). Eine der wichtigsten Fragen in der Zahlentheorie ist die Frage nach der Lösbarkeit von Gleichungen. Für quadratische Formen über den rationalen Zahlen gehorcht diese Lösbarkeit einem **Lokal-Global-Prinzip**: eine Gleichung $a_1x_1^2 + \ldots + a_kx_k^2 = 0$ mit Koeffizienten $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Q}$ hat genau dann eine von Null verschiedene Lösung, wenn sie dies in jeder Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ hat, nämlich in den rellen Zahlen $\mathbb{R}$ und in den p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$ für jede Primzahl p (Satz von Hasse-Minkowski). Um dies genauer zu verstehen, beginnen wir das Seminar mit dem Studium der **p-adischen Zahlen** und des **Hilbertsymbols**

$$(a,b) = \begin{cases} +1, & \text{falls } z^2 - ax^2 - by^2 = 0 \text{ eine Lösung } \neq (0,0,0) \text{ in } \mathbb{Q}_p^3 \text{ hat;} \\ -1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Klassifikation quadratischer Formen und die Definition des Hilbertsymbols führen zu modernen Theorien wie Milnor-K-Theorie und Milnor-Witt-K-Theorie, welche wir im zweiten Teil des Seminars im Detail studieren werden.

Formale Teilnahmevoraussetzung: Lineare Algebra 2.

Empfohlene Vorkenntnisse: Kommutative Ringe, diskrete Bewertungsringe.

Zeit und Ort: Donnerstags, 14:15–15:45 Uhr, SR ??.

Kontakt: Falls Sie Fragen haben, schreiben Sie bitte eine Email an
Christian Dahlhausen (`cdahlhausen@mathi.uni-heidelberg.de`) oder
Morten Lüders (`mlueders@mathi.uni-heidelberg.de`).

Literatur: Einen Überblick über die Thematik ohne Beweise gibt der Text von Izquierdo [Izq20]. Die Theorie der quadratischen Formen geht im Wesentlichen auf Witt zurück [Wit37]. Milnor stellte den Bezug zur K-Theorie her [Mil70]. Milnor-Witt-K-Theorie wurde erst vor Kurzem von Morel eingeführt [Mor04] und spielt auch in der $\mathbb{A}^1$-Homotopietheorie von Schemata eine Rolle.

Im ersten Teil des Seminars über quadratische Formen folgen wir Serres Buch „A Course in Arithmetic“ [Ser73]; weitere Quellen sind sind die Bücher Lam [Lam05] und Schmidt [Sch07, Kap. 10]. Im Teil über Milnor-K-Theorie folgen wir dem Buch von Gille-Szamuely [GS17] und im Teil über Milnor-Witt-K-Theorie dem Buch von Morel [Mor12, §3].

Anrechenbarkeit: Alle Vorträge können im Bachelor angerechnet werden, im Master lediglich die Vorträge 6-14.

Anmeldung: Sie können sich auf MÜSLI für einen Vortrag anmelden oder unverbindlich in die Sammelgruppe eintragen (sodass Informationen Sie erreichen können). Bis zum 30.09.2024 können Sie sich wieder abmelden, danach ist eine Abmeldung nicht mehr möglich.

Vorträge

Im Folgenden sei F stets ein Körper (wenn nötig, von Charakterstik ungleich 2).

Vortrag 1: Das quadratische Reziprozitätsgesetz (17.10.)
Einführung des Legendre-Symbols: für eine ganze Zahl x und eine Primzahl p sei $(\frac{x}{p}) \in \{\pm 1\}$ genau dann 1, wenn x ein Quadrat modulo p ist. Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes: für ungerade Primzahlen p und ℓ ist $(\frac{\ell}{p}) = (\frac{p}{\ell})(-1)^{\frac{\ell-1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}}$ und $(\frac{2}{p}) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$. Beispielsweise ist

$$\left(\frac{29}{43}\right) = \left(\frac{43}{29}\right) = \left(\frac{14}{29}\right) = \left(\frac{2}{29}\right)\left(\frac{7}{29}\right) = -\left(\frac{7}{29}\right) = -\left(\frac{29}{7}\right) = -\left(\frac{1}{7}\right) = -1,$$

also ist 29 kein Quadrat mod 43.
Quelle: [Ser73, Ch. I, §3.]

Vortrag 2: Die p-adischen Zahlen (24.10.)
Sei p eine Primzahl. Einführung des topologischen Ringes der ganzen p-adischen Zahlen $\mathbb{Z}_p$ und seines Funktionenkörpers $\mathbb{Q}_p$. Lösbarkeit von Gleichungen in den p-adischen Zahlen. Beschreibung der Einheitengruppe $\mathbb{Q}_p^\times$ des Körpers $\mathbb{Q}_p$ mittels der Filtrierung der höheren Einheiten. Explizite Struktur der Einseinheiten. Charakterisierung der Quadrate in $\mathbb{Q}_p^\times$.
Quelle: [Ser73, Ch. II, §1 – §3].

Vortrag 3: Das Hilbertsymbol (31.10.)
Satz von Ostrowski (ohne Beweis). Sei $K \in \{\mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{Q}_p \,|\, p \text{ Primzahl}\}$. Für $a, b \in K^\times$ wird das lokale Hilbertsymbol

$$(a,b) = \begin{cases} +1, & \text{falls } z^2 - ax^2 - by^2 = 0 \text{ eine Lösung } \neq (0,0,0) \text{ in } K^3 \text{ hat.} \\ -1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

studiert und in Termen des Legendre-Symbols berechnet.
Es gibt Einbettungen $i_p\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_p$ (für jede Primzahl p) und $i_\infty\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. Für $a, b \in \mathbb{Q}^\times$ setzen wir $(a,b)_\nu = (i_\nu(a), i_\nu(b))$ für $\nu = p$ oder ∞. Dann ist $(a,b)_\nu = 1$ für fast alle ν und es ist $\prod_\nu (a,b)_\nu = 1$. Existenz rationaler Zahlen mit vorgegebenem Hilbert-Symbol.
Quelle: [Ser73, Ch. III, §1-§2].

Vortrag 4: Quadratische Formen und Zerlegungssatz (07.11.)
Definition von quadratischen Formen über Körpern der Charakteristik ungleich 2. Definition quadratischer Räume[1] und deren Morphismen. Eigenschaften quadratischer Räume (isotrop, hyperbolisch, anisotrop). Jeder quadratische Raum zerfällt in eine orthogonale Summe aus einem rein isotropen Raum, einem hyperbolischen Raum und einem anisotropen Raum (Existenz im Zerlegungssatz von Witt). Klassifikation quadratischer Formen über algebraisch abgeschlossenen Körpern, den reellen Zahlen und endlichen Körpern.
Quellen: [Ser73, Ch. IV, §1.1–§1.4], [Lam05, Ch. I, §4].

Vortrag 5: Kürzungssatz und Grothendieck-Witt-Ring (14.11.)
Kürzungssatz von Witt und Eindeutigkeit im Zerlegungssatz von Witt. Definition des Grothendieck-Witt-Rings $\mathrm{GW}(F) = \hat{\mathrm{W}}(F)$, des Witt-Rings $\mathrm{W}(F)$ und des Fundamentalideals $\mathrm{I}(F)$. Erste Eigenschaften dieser Objekte und Beispiele (algebraisch abgeschlossene Körper, reelle Zahlen, endliche Körper).
Quellen: [Ser73, Ch. IV, §1.5–§1.6], [Lam05, Ch. I, §4 & Ch. II, §1].

Vortrag 6: Darstellung des Grothendieck-Witt-Rings und des Witt-Rings (21.11)
Beweis von Witts Kettenäquivalenzsatz. Explizite Beschreibungen des Grothendieck-Witt-Rings $\mathrm{GW}(F)$ und des Witt-Rings $\mathrm{W}(F)$ durch Erzeuger und Relationen.
Quelle: [Lam05, Ch. I, §5 & Ch. II, §1-§4].

[1] Bei Serre [Ser73] werden diese in einer größeren Allgemeinheit „quadratische Moduln“ genannt.

Vortrag 7: Quadratische Formen über $\mathbb{F}_p$ und $\mathbb{Q}_p$ (28.11.)
Dimension $\dim\colon \mathrm{W}(F) \to \mathbb{Z}$ und induzierter Isomorphismus $\overline{\dim}^0\colon \mathrm{W}(F)/\mathrm{I}(F) \cong \mathbb{Z}/2$. Diskriminante $\mathrm{d}\colon \mathrm{W}(F) \to F^\times/F^{\times,2}$ und induzierter Isomorphismus $\mathrm{d}_\pm\colon \mathrm{I}(F)/\mathrm{I}(F)^2 \cong F^\times/F^{\times,2}$. Quadratische Formen über $\mathbb{F}_q$. Klassifikation quadratischer Formen über $\mathbb{Q}_p$ vermöge deren Rang, Diskriminante und Hilbert-Symbol.
Quellen: [Izq20, §6], [Ser73, Ch. IV, §1.7, §2].

Vortrag 8: Der Satz von Hasse-Minkowski (05.12.)
Eine quadratische Form $a_1x_1^2+\cdots+a_nx_n^2$ mit $a_i \in \mathbb{Q}^\times$ hat genau dann eine von Null verschiedene Nullstelle, wenn sie dies in $\mathbb{R}$ und für jede Primzahl p in $\mathbb{Q}_p$ hat. Klassifikation quadratischer Formen über $\mathbb{Q}$.
Quelle: [Ser73, Ch. IV, §3.1–§3.3].

Vortrag 9: Quaternionenalgebren und quadratische Formen (12.12.)
Definition verallgemeinerter Quaternionenalgebren $\left(\frac{a,b}{F}\right)$ für $a, b \in F$. Struktur eines quadratischen Raumes vermöge der zugehörigen Normabbildung $\mathrm{N}_{a,b}\colon \left(\frac{a,b}{F}\right) \to F$. Zusammenhang von Isomorphie zwischen Quaternionenalgebren und Isometrie der zugehörigen quadratischen Räume. Definition und äquivalente Charakterisierung von zerfallenden Quaternionenalgebren.
Quellen: [Izq20, §7], [Lam05, Ch. III, §1-§2 bis einschl. Thm. 2.7].

Vortrag 10: Zentraleinfache Algebren und Brauergruppe (19.12.)
Definition zentraleinfacher Algebren über F. Ähnlichkeit zentraleinfacher Algebren ist eine Äquivalenzrelation. Definition der Brauergruppe $\mathrm{Br}(F)$. Rechenregeln für Quaternionenalgebren in $\mathrm{Br}(F)$ [Izq20, Règles de calcul 8.3]. Konstruktion der Clifford-Invariante $c\colon \mathrm{W}(F) \to \mathrm{Br}(F)$.
Quellen: [Izq20, §8], [Lam05, Ch. III, §2 ab Thm. 2.7, Ch. IV, §1].

Vortrag 11: Milnor-K-Theorie und das zahme Symbol (09.01.)
Definition von Milnor-K-Theorie $\mathrm{K}_*^{\mathrm{M}}(F)$ als graduierter Ring. Beweis erster Rechenregeln und Beispiele (endliche Körper und reelle Zahlen). Kurze Erinnerung an diskret bewertete Körper und diskrete Bewertungsringe. Konstruktion des zahmen Symbols $\partial^{\mathrm{M}}\colon \mathrm{K}_n^{\mathrm{M}}(F) \to \mathrm{K}_{n-1}^{\mathrm{M}}(\kappa)$ und der Spezialisierungsabbildung $s_\pi^{\mathrm{M}}\colon \mathrm{K}_n^{\mathrm{M}}(F) \to \mathrm{K}_n^{\mathrm{M}}(\kappa)$ für eine diskrete Bewertung $v\colon F^\times \to \mathbb{Z}$ mit Restklassenkörper κ und Uniformisierender π. Beschreibung der Kerne dieser Abbildungen.
Quelle: [GS17, §7.1].

Vortrag 12: Die Milnor-Folge und das Bass-Tate-Lemma (16.01.)
Beweis der exakten Milnor-Folge für die Milnor-K-Theorie $\mathrm{K}_n^{\mathrm{M}}(F(t))$ des Funktionenkörpers $F(t)$. Definition der Normabbildungen in diesem Kontext und Ableitung des Weilschen Reziprozitätsgesetzes.
Quelle: [GS17, §7.2]

Vortrag 13: Milnor-Witt-K-Theorie von Körpern (23.01.)
Definition von Milnor-Witt-K-Theorie $\mathrm{K}_*^{\mathrm{MW}}(F)$ über Erzeuger und Relationen. Beweis der Beziehungen zum Grothendieck-Witt-Ring $\mathrm{GW}(F)$, zum Witt-Ring $\mathrm{W}(F)$ und zur Milnor-K-Theorie $\mathrm{K}_*^{\mathrm{M}}(F)$.
Quelle: [Mor12, §3.1]

Vortrag 14: Unverzweigte Milnor-Witt-K-Theorie (30.01.)
Konstruktion und Beweis der Homomorphismen $\partial_v^\pi\colon \mathrm{K}_*^{\mathrm{MW}}(F) \to \mathrm{K}_{*-1}^{\mathrm{MW}}(\kappa)$ und $s_v^\pi\colon \mathrm{K}_*^{\mathrm{MW}}(F) \to \mathrm{K}_*^{\mathrm{MW}}(\kappa)$ für eine diskrete Bewertung $v\colon F^\times \to \mathbb{Z}$ und eine Uniformisierende π. Soweit die Zeit es erlaubt, Beweis der exakten Folge für $\mathrm{K}_n^{\mathrm{MW}}(F(t))$ [Mor12, Thm. 3.24].
Quelle: [Mor12, §3.2]

Vortrag 15: Puffer (06.02.)

Organisatorisches

Eine erfolgreiche Teilnahme am Seminar beinhaltet folgende Leistungen:

- Das Halten eines **Vortrages** von ungefähr 80 Minuten. (Die restlichen 10 Minuten bleiben für Fragen und Diskussionen.)
- Das Erstellen eines **Handouts**. Dieses soll die wesentlichen Ergebnisse des Themas zusammenfassen und eine Übungsaufgabe beinhalten. Es darf auch in den Vortrag eingebunden werden. Es sollte mit LaTeX geschrieben sein und einen Umfang von zwei Seiten nicht überschreiten.
- Eine regelmäßige und **aktive Teilnahme** am Seminar. (Bei Abwesenheit bitte eine kurze Nachricht per Email.)

Beginnen Sie bitte frühzeitig mit der Bearbeitung Ihres Themas, indem Sie die entsprechenden Seiten in den Quellen lesen und zu verstehen suchen. Idealerweise beachten Sie dabei auch die Verbindung zu den Vorträgen vor und nach Ihrem Vortrag. Melden Sie sich bitte rechtzeitig (mindestens 2 Wochen vor dem Vortragstermin) zu einer **Vorbesprechung**. In dieser werden die Details zu Inhalt und Strukturierung des Vortrages besprochen. Nach der Besprechung sollte genug Zeit sein, die weiteren inhaltlichen Details auszuarbeiten, den Vortrag genauer zu planen, und das Handout fertigzustellen.

Bei der Planung des Vortrages sollten Sie zwei Dinge im Blick behalten: Zum einen sollten Sie alle Details ihres Themas verstehen, zum anderen sollten Sie den Vortrag so gestalten, dass die anderen Teilnehmenden, für die das Thema in der Regel neu sein wird, diesen auch verstehen. Im Mittelpunkt eines jeden Vortrags sollte immer das Publikum stehen. Es lohnt sich deshalb immens, den gesamten Vortrag, am besten mit Publikum, Probe zu halten.

Weitere Tipps und Hinweise finden Sie z.B. unter diesem Link.

Literatur

[GS17] Philippe Gille and Tamás Szamuely, *Central simple algebras and Galois cohomology*, second ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 165, Cambridge University Press, Cambridge, 2017.

[Izq20] Diego Izquierdo, *Autour de la conjecture de Milnor*, Gaz. Math. (2020), no. 166, 35–49, `https://perso.pages.math.cnrs.fr/users/diego.izquierdo/media/Research/Gazette_final.pdf`.

[Lam05] Tsit Yuen Lam, *Introduction to quadratic forms over fields*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 67, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[Mil70] John Milnor, *Algebraic K-theory and quadratic forms*, Invent. Math. **9** (1969/70), 318–344.

[Mor04] Fabien Morel, *Sur les puissances de l'idéal fondamental de l'anneau de Witt*, Comment. Math. Helv. **79** (2004), no. 4, 689–703.

[Mor12] ———, *$\mathbb{A}^1$-algebraic topology over a field*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2052, Springer, Heidelberg, 2012.

[Sch07] Alexander Schmidt, *Einführung in die algebraische Zahlentheorie*, Springer, Berlin, 2007.

[Ser73] Jean-Pierre Serre, *A course in arithmetic*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973, Translated from the French, Graduate Texts in Mathematics, No. 7.

[Wit37] Ernst Witt, *Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern*, J. Reine Angew. Math. **176** (1937), 31–44.